Resolver problemas envolvendo prova e demonstração: uma dificuldade para professores de ensino básico

Saddo Ag Almouloud, Jean-Claude Regnier, Cristiana Abud da Silva Fusco

RESOLVER PROBLEMAS ENVOLVENDO PROVA E DEMONSTRAÇÃO: UMA DIFICULDADE PARA PROFESSORES DE ENSINO BÁSICO

(RESOLVING PROBLEMS INVOLVING PROOF AND DEMONSTRATION: A DIFFICULTY FOR PRIMARY AND SECONDARY SCHOOL TEACHERS)

Saddo Ag Almouloud
Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Rua Marquês de Paranaguá, 111, Consolação, cep. 01303-050, São Paulo-SP, Brasil
e-mail: saddoag@pucsp.br

Jean-Claude Regnier
Université de Lyon - Université Lumière Lyon2 (FRA). Rue Pasteur, 86, 69007 - Lyon, - França
e-mail: jean-claude.regnier@univ-lyon2.fr

Cristiana Abud da Silva Fusco
Pontificia Universidade Catolica de São Paulo, ,Rua Marquês de Paranaguá, 111, Consolação, cep. 01303-050, São Paulo-SP, Brasil

Resumo. *Na última década, a importância atribuída a provas e demonstrações em Matemática levou a uma enorme variedade de pesquisas nessa área. Consideramos, usualmente, a demonstração como um procedimento de validação que caracteriza a Matemática e a distingue das ciências experimentais. Fazemos parte de um grupo de pesquisa que desenvolve um projeto junto a professores da rede pública e particular da cidade de São Paulo e que discutiu, na sua fase inicial, o raciocínio dedutivo no processo de ensino e aprendizagem da Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental. Esse projeto realiza uma formação continuada para professores preocupados com a sua prática pedagógica e que gostariam de incrementá-la, repensando saberes ou até mesmo entrando em contato com conteúdos matemáticos pela primeira vez. Nesse trabalho, inicialmente, levantamos algumas questões teóricas relacionadas à demonstração e que procuram compreender melhor o raciocínio lógico. Em seguida, apresentamos um estudo de caso, na abordagem qualitativa, em que observamos as dificuldades de um professor do ensino básico em identificar a hipótese e a tese em uma afirmação matemática da área de geometria, especialmente, quando essa não apresenta a famosa expressão "se e somen uma proposição corresponder ou não a um teorema recíproco. A compreensão da informação dada no enunciado de uma proposição matemática e o reconhecimento de elementos cruciais como hipótese e tese são fundamentais para o processo de construção de uma demonstração aceitável.*

Palavras-chave: *hipótese-tese- teorema recíproco- demonstração- formação de professores*

Summary. *In the last decade, the importance attributed to proofs and demonstrations in Mathematics has led to a large variety of research in this area. We consider, generally, the demonstration as a validation procedure that characterizes Mathematics and distinguishes it from experimental sciences. We are part of a research group that develops a project together with teachers from the public and private school systems in the city of São Paulo and that, in its initial phase, discussed deductive reasoning in the process of teaching and learning Mathematics in the Middle School grades. This project provides continuing education for teachers concerned with their pedagogical practices and who would like to increment them, rethinking knowledge or even coming into contact with mathematics topics for the first time. In this work, we initially raise some theoretical questions that are related to demonstrations and that seek to better understand logical reasoning. We next present a case study, in a qualitative approach, in which we observe a teacher's difficulties in identifying the hypothesis and thesis of a mathematical affirmation in the area of geometry, especially when it does not present the famous expression "if and only if." We also discuss the issue of whether or not a proposition corresponds to a reciprocal theorem. Comprehension of the information given in the problem statement of a mathematics proposition and recognition of crucial elements such as hypothesis and thesis are fundamental to the process of constructing an acceptable demonstration.*

Key Words: *hypothesis- thesis- reciprocal theorem- demonstration- teacher education*

1. Introdução

Nos últimos anos vimos sofrendo com uma "síndrome do imediatismo", isto é, uma ansiedade por resultados imediatos. Tudo que se faz ou se pensa deve gerar um resultado prático e imediato. Essa busca por resultados é sentida nas salas de aula quando o professor de matemática tem de desenvolver seu conteúdo e depara-se freqüentemente com questões do tipo: para que serve isso? Quando iremos utilizar e de que forma? O aluno sente a necessidade de enxergar quase que instantaneamente uma aplicação para o que está aprendendo. Esse sentimento é apoiado pelas teorias que defendem uma aprendizagem contextualizada no sentido de propiciar uma aprendizagem com mais significado para os alunos. É inegável que esse aspecto de contextualizar conteúdos pode tornar a aprendizagem mais atraente além de dar sentido a diversos conteúdos. No entanto, existem grupos de educadores matemáticos preocupados em resgatar o ensino da matemática em que se utiliza também provas e demonstrações nos ensinos fundamental e médio. A importância atribuída a provas e demonstrações na última década levou a uma enorme variedade de pesquisas nessa área. Tal fato pode ser observado pelo número de trabalhos apresentados em congressos internacionais, artigos publicados em revistas de renome, pelas teses de doutorado relacionadas a provas e pela quantidade de visitantes do "Newsletter on Proof" como confirma Balacheff (2008) em seu recente artigo.

As dificuldades relacionadas a provas e demonstrações são inúmeras e vão desde se reconhecer uma demonstração num livro de matemática (Almouloud, 2006), identificar na proposição os dados que fazem parte da hipótese e da tese até identificar se a proposição possui condições necessária e suficiente. No que se refere a construção de uma demonstração os problemas já se intensificam e então surge a questão: como realizar uma argumentação por meio de relações construídas de maneira coerente que de fato comprove o que se deseja utilizando-se os dados da proposição e recursos matemáticos conhecidos? Nesse trabalho, inicialmente, levantaremos algumas questões teóricas relacionadas à demonstração e que procuram compreender melhor o raciocínio lógico. Em seguida, realizaremos uma análise de estudo de caso observado em atividades realizadas por um grupo de professores participantes de uma formação continuada que tinha como um de seus objetivos incentivá-los a incrementar sua prática docente a partir de atividades que propiciassem a reconstrução de saberes relacionados a conteúdos matemáticos previstos para serem ensinados nas séries finais do ensino fundamental e que são passíveis de demonstração. Nesse estudo retrataremos a identificação de proposições que correspondem ou não a teoremas recíprocos.

2. Reflexões teoricas

Muitos trabalhos buscam uma melhor compreensão do raciocínio lógico e das demonstrações em matemática. Consideramos, usualmente, a demonstração como um procedimento de validação que caracteriza a Matemática e a distingue das ciências experimentais, além de ocupar um lugar de destaque nessa disciplina. Nas nossas pesquisas, adotamos a distinção entre explicação, prova e demonstração segundo Balacheff (1982). A *explicação* situa-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar ao outro, o caráter de verdade de um enunciado matemático. A explicação, reconhecida como convincente por uma comunidade, adquire um estatuto social e constitui-se uma prova para esta comunidade, sendo a proposição "verdadeira" ou não. As *provas* são explicações aceitas em um determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para determinado grupo social, mas não para um outro. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, Balacheff (1982) denomina, somente neste caso, de demonstração. *As demonstrações* são provas particulares com as seguintes características:

- são as únicas aceitas pelos matemáticos;
- respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas em um conjunto de regras lógicas;
- trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência.

Balacheff (2004) discute diversas perspectivas de prova matemática no processo de ensino e aprendizagem e confronta as afirmações de De Villiers (i) e Hanna e Janke (ii) (apud BALACHEFF, 2004, p. 13) a respeito das funções da prova:

> (i) verificação, explicação, sistematização, descoberta e comunicação;
>
> (ii) construção de uma teoria empírica, exploração do significado de uma definição ou das conseqüências de uma hipótese, absorvendo um fato novo em uma nova estrutura que permite uma nova percepção.

Balacheff (2008), numa perspectiva epistemológica, argumenta ainda que a racionalidade é a base de qualquer processo de prova. A forma como vemos a racionalidade em geral e sua relação com a matemática em particular é um ponto chave para a compreensão de pesquisas relacionadas a demonstrações. Podemos aceitar que provar depende do conteúdo e do contexto. O autor coloca, ainda, que a comprovação de uma verdade não pode ser realizada da mesma forma no dia-a-dia, no direito, na política, na filosofia, na medicina, na física ou na matemática. Não utilizamos as mesmas regras e critérios para tomadas de decisões nos diversos contextos em que estamos envolvidos. Essas regras e critérios podem dar origem a opiniões, crenças e conhecimentos, mas em todos esses casos estão organizados numa estrutura que permite o raciocínio e a tomada de decisão.

Encontramos trabalhos como o de Hanna (2008) em que se discute a tese de Rav (1999,7, pp.5-41) cujas idéias principais estão relacionadas à crença de que as demonstrações fornecem importantes elementos para a matemática como estratégias e métodos; para o autor "provas mais do que os teoremas são os alicerces do conhecimento matemático" (nossa tradução). Os autores consideram que realmente existe um consenso entre matemáticos, filósofos e educadores matemáticos de que as demonstrações são, para a matemática, sua parte mais importante uma vez que a demonstração é que estabelece a validade de uma afirmação matemática. Eles colocam que Rav, sem dúvida, concorda com isso, mas afirma que existe um aspecto da demonstração que não se dá a devida atenção, e que a importância da demonstração vai muito além de se estabelecer uma verdade matemática. Nesse sentido, uma demonstração tem valor não só porque comprova um resultado, mas também porque pode apresentar novos métodos, ferramentas, estratégias e conceitos que tenham uma aplicabilidade mais ampla em matemática e aponte novas direções matemáticas. As demonstrações são indispensáveis para a ampliação de conhecimento matemático; o simples ato de planejar uma prova contribui para o desenvolvimento da matemática. As demonstrações produzem novas visões matemáticas, novas ligações contextualizadas, e novos métodos para resolver problemas, dando a elas um valor muito além de comprovar a veracidade de proposições.

São muitas as pesquisas que tratam dos aspectos históricos e epistemológicos relacionados à natureza da prova e demonstração em matemática e suas funções na matemática. Esse tipo de pesquisa constitui assim um foco tradicional de pesquisa que propiciou uma série de contribuições nesse campo. Balacheff (2008) discute uma outra perspectiva que tem como foco a relação entre os aspectos epistemológicos e cognitivos. Nessa perspectiva, o foco é o aluno como um sujeito que encara o problema da demonstração na sua atividade matemática. A transposição didática da demonstração em matemática para a sala de aula tem dois alvos: enfatizar as dificuldades dos alunos e propor novas estratégias de intervenção de ensino.

Ainda, nessa perspectiva histórica e epistemológica das discussões sobre demonstração encontram-se os estudos de (Mariotti/Balacheff 2008) que discutem as semelhanças e complementações de questões relacionadas a demonstrações, chamando a atenção para o fato de que a demonstração vai muito além da verdade matemática que se deseja comprovar. Consideram o estudo de Hanna e Barbeau que acreditam que a idéia chave da tese de Rav poderia ser aplicada em sala de aula com sucesso. O ato de planejar uma demonstração contribui para o desenvolvimento de novas compreensões matemáticas. O argumento principal não diz respeito a generalidade dos processos de demonstração mas a especificidade de certas demonstrações e suas potencialidades de prover os estudantes com importantes elementos matemáticos como estratégias e métodos para resolução de problemas.Os autores também comentam a noção de transparência que está relacionada a falta de conhecimento a respeito de técnicas de demonstrações ou idéias-chave de demonstrações e estratégias de demonstrações. Citam, ainda, Jahnke que foi quem elaborou a distinção entre teoremas "abertos e fechados". Essa distinção descreve a flexibilidade com a qual matemáticos tratam o conjunto de hipóteses na fase inicial do teorema, dentro de novas áreas da matemática. Tal distinção nos possibilita a compreender algumas interpretações equivocadas do enunciado do teorema como a "confusão" entre as condições necessária e suficiente que só é reconhecida com facilidade quando a expressão "se e somente se" faz parte do enunciado.

3. Estudo de caso

Como colocado anteriormente, grupos de pesquisadores em Educação Matemática se preocupam em resgatar atividades matemáticas que proporcionem o desenvolvimento do raciocínio dedutivo presente na demonstração de resultados matemáticos. Dentre os grupos de pesquisa que discutem argumentação, provas e demonstrações encontra-se o nosso que desenvolveu um projeto junto a professores da rede pública e particular da cidade de São Paulo intitulado: *O raciocínio dedutivo no processo de ensino e aprendizagem da Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental.* Trata-se de professores preocupados com a sua prática pedagógica e que gostariam de incrementá-la, porém não sabiam como fazê-lo. Dessa forma, dispuseram-se a participar como voluntários de uma pesquisa a respeito do raciocínio dedutivo, onde, através de uma formação continuada vivenciaram certas ações e puderam reconstruir suas concepções e, conseqüentemente, sua prática docente. O trabalho realizado direcionou-se em quatro fases: a análise epistemológica da noção de demonstração em matemática; a análise do processo ensino-aprendizagem envolvendo provas e demonstração; a análise das concepções dos estudantes e professores a respeito de demonstração (incluindo suas dificuldades e obstáculos relacionados a sua evolução em termos de raciocínio dedutivo) e da análise das condições da realização efetiva da formação de professores do Ensino Básico participantes do projeto.

Nosso projeto de pesquisa foi norteado pelas seguintes etapas:

1. Diagnosticar concepções iniciais dos professores que pretendem participar do processo de formação em situações envolvendo provas e demonstrações, por meio de mapa conceitual e entrevista estruturada.
2. Com base nos resultados e nos estudos didático-epistemológicos, elaborar um conjunto de situações para serem desenvolvidas com os professores.
3. Orientar os professores na elaboração, análise e aplicação de um conjunto de atividades para ser desenvolvido com seus alunos. Realizamos, neste sentido, discussões no processo tanto de modo presencial quanto no Fórum do Ambiente Virtual.
4. Diagnosticar possíveis mudanças de concepções e da prática pedagógica dos professores, por meio de mapa conceitual, entrevistas e de acompanhamentos em sala de aula e no Ambiente virtual.
5. Analisar as produções escritas e orais dos professores e os testes aplicados aos seus alunos, fazendo uso de *software* de tratamento de dados estatísticos.
6. Analisar o papel do raciocínio dedutivo nas abordagens de alguns livros didáticos de matemática do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental.

Essa formação, que ainda perdura com outra temática, é constituída de encontros semanais com duração de três horas. Nesses encontros, uma professora coordena os trabalhos que são realizados individualmente, em duplas ou em trios. Geralmente os professores recebem o material fotocopiado com problemas a serem resolvidos. Também ocorrem momentos em que a formadora interage com o grupo, discutindo e colocando na lousa resultados do que se havia tratado no material entregue. Vale destacar que os professores participantes dessa pesquisa possuem licenciatura em matemática ou uma complementação que os habilita a lecionar. Nesse projeto adotamos os princípios da pesquisa-ação, pois ele foi concebido e está sendo realizado em estreita associação com uma ação ou com a resolução de problema coletivo no qual tanto os pesquisadores quanto os professores participantes estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo (Thiolent, 1998).

Conforme colocado anteriormente, pretendemos discutir algumas questões a respeito de provas ilustrando-as com resultados obtidos a partir da investigação com os professores que participaram dessa formação continuada na etapa relativa ao resgate da prova e da demonstração em sala de aula dos ensinos fundamental e médio. No decorrer do projeto, os professores realizaram atividades que favoreceram a compreensão do significado de demonstração e de seu papel no ensino, com o propósito de incentivá-los a integrar provas e demonstrações ao processo de formação de seus alunos "ajudando-os a restituir a historicidade de prova, de demonstração e de rigor matemático" (Gouvêa, 1998, p. 1).

Nessa pesquisa, o estudo de caso propiciou-nos obter os dados para a nossa questão considerando-se que essa modalidade "[...] é recomendável para a construção de hipóteses, para confirmação ou reformulação do problema e, sobretudo, quando se quer estudar algo singular, que tenha um valor em si mesmo" (Fiorentin e Lorenzato, 2006, p. 109-110). Vale mencionar que o estudo de caso segue uma abordagem qualitativa e busca retratar a realidade de forma profunda e completa. No presente trabalho nosso estudo de caso pretende observar: as dificuldades de um professor do ensino básico em identificar se uma proposição corresponde ou não a um teorema recíproco e sua habilidade em reconhecer a hipótese e a tese em uma afirmação matemática. Tal estudo, evidentemente, contribuirá na busca de respostas para as discussões relacionadas ao raciocínio dedutivo que envolve professores da rede pública que lecionam no Ensino Básico. Durante a sessão em que ocorreu a atividade que será descrita a seguir, em detalhes, contamos com a presença de professores observadores, além de áudio gravação.

Passaremos a descrever um pequeno trecho de uma das sessões do nosso projeto em que os professores em formação demonstram não ter clareza das diferenças entre teorema, lema, corolário e teoremas recíprocos, isto é, aqueles que possuem as condições necessárias e suficientes. Além disso, podemos estender a discussão afirmando que muitos alunos somente reconhecem uma afirmação como teorema se ela estiver redigida na forma "se ....,então".

Nessa sessão que faz parte de um conjunto de sessões que tem como objetivo uma iniciação à demonstração em geometria estavam presentes dois formadores que indicaremos por F1 e F2 e os professores que se manifestaram serão identificados por P1,P2 e P3.

Após uma breve retomada do que foi discutido na sessão anterior, F1 inicia a sessão registrando na lousa: "Todo ponto que pertence à mediatriz de um segmento é eqüidistante das extremidades desse segmento."

P1 diz que na oficina anterior provou-se que qualquer ponto P que eqüidista das extremidades de um segmento AB é a reta mediatriz m.

F1 corrige e F2 registra na lousa:

* Qualquer ponto P que eqüidista das extremidades de um segmento pertence à mediatriz desse segmento.

F2 pede para que um dos dois professores ausentes na sessão anterior repita o que havia sido discutido para conferir se o relato foi compreendido por eles.

P2 explica com a ajuda de F1, que escreve na lousa:

- Se P pertence à mediatriz m de um segmento AB, então P é eqüidistante de A e B.
- Se P é eqüidistante de A e B, então P pertence à mediatriz m do segmento AB.

F2 pergunta se as duas afirmações podem ser consideradas teoremas recíprocos e afirma que sim uma vez que já foram demonstrados.

F2 indaga o que significa um teorema ser o recíproco de outro. Como os presentes ficam em dúvida, F2 pergunta qual é a hipótese em cada caso.

P3 responde que no primeiro caso, a hipótese é $P \in m$ e que a tese é: a distância de P até A é igual à distância de P até B.

F2 registra a tese: PA = PB, mas F1 observa que a tese de P3 refere-se a distâncias.

F1 complementa o registro da tese: d(P,A) = d(P,B).

Sobre o segundo teorema, P1 diz que a hipótese é PA = PB e a tese $P \in m$.

P3 pergunta sobre notação de medida e P1 pergunta qual é a diferença entre PA e $\overline{PA}$.F1 realiza as explicações necessárias.

F2 pergunta a P2 o que significam teoremas recíprocos.

P2 responde que a hipótese de um é a tese do outro e vice-versa.

P3 pergunta se teorema é o mesmo que propriedade. F1 responde que sim.

P3 pergunta o que são corolários. F2 responde que são conseqüências de teoremas e, completa ainda, que o lema prepara o teorema.

F1 complementa a explicação dizendo que lemas são pequenos teoremas e que, ao demonstrar um teorema, alguns resultados são imediatos. Estes constituem os corolários que também são teoremas e também são demonstráveis.

F2 escreve na lousa:

- Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes.
- F2 pergunta a P2 qual seria a proposição recíproca e ela responde:

- Se dois ângulos são congruentes, então são opostos pelo vértice.

F2 pergunta quais são as hipóteses e teses nos dois casos e registra na lousa as respostas fornecidas.

1º) Hipótese: $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são opostos pelo vértice (opv)

Tese: $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$

2º) Hipótese: $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$

Tese: $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são opv

F1 pede uma prova.

P1 responde com um contra-exemplo no qual apresenta dois ângulos congruentes, mas que não são opostos pelo vértice (figura 1).

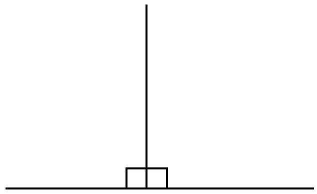

Figura 1

F1 pergunta se vale a volta do teorema dizendo que a primeira afirmação é verdadeira, mas a volta não é um teorema.

F2 conclui que nem todo teorema tem recíproco.

P3 pergunta se é teorema somente quando tem a ida e a volta.

F1 responde que não.

F2 pergunta como ficaria a redação de um teorema e seu recíproco usando o símbolo $\Leftrightarrow$.

P1 diz: P pertence à mediatriz m de um segmento AB se, e somente se, P é eqüidistante de A e B.

P3 pergunta como se deve chamar este último teorema e se existiria um nome especial.

F2 responde que tanto os teoremas independentes como aqueles que têm ida e volta, são teoremas.

F1 pergunta como fica o registro na linguagem simbólica e escreve:

Seja m a mediatriz de $\overline{AB}$, $P \in m \Leftrightarrow \overline{PA} \equiv \overline{PB}$.

F2 apresenta outro registro:

$P \in m \Rightarrow \overline{PA} \equiv \overline{PB} \wedge \overline{PA} \equiv \overline{PB} \Rightarrow P \in m$

F2 comenta que, em sala de aula, como o professor enuncia "se, então", o aluno entende como recíproco

Nessa descrição ficou evidente a dificuldade que alguns professores têm em identificar nas informações contidas no enunciado de uma proposição matemática os dados que se referem às hipóteses e o fato que realmente se deseja comprovar. Dessa forma, também não conseguem perceber de imediato se a proposição possui condições necessárias e suficientes o que caracteriza um teorema recíproco. Tal fato, pode ser observado no diálogo entre os formadores e professores a respeito da proposição *"Todo ponto que pertence à mediatriz de um segmento é eqüidistante das extremidades desse segmento"* que foi sub-dividida em duas outras usando-se a familiar expressão "se, ... então": *"Se P pertence à mediatriz m de um segmento AB, então P é eqüidistante de A e B."* e *"Se P é eqüidistante de A e B, então P pertence à mediatriz m do segmento AB"*.Essa nova forma de redação deu visibilidade às condições necessária e suficiente da proposição em questão. E no final dessas discussões quando um dos formadores indaga o que vem a ser teoremas recíprocos, um dos professores afirma por meio de uma fala simples, porém com convicção: *"a hipótese de um é a tese do outro e vice-versa"*. Com relação a outra proposição *"se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes",* a construção da proposição recíproca possibilitou que um professor elaborasse um contra-exemplo. Esse contra-exemplo registrado na lousa mostrando dois ângulos retos, isto é, congruentes e que não eram opostos pelo vértice tornou evidente para o grupo que a proposição não era verdadeira. Sendo assim, a proposição em questão não poderia ser considerada como um teorema recíproco. Retomaremos essa análise mais adiante, pois no momento julgamos oportuno resgatar outra pesquisa realizada com professores e que também é relacionada a dificuldades preliminares de demonstração.

Observamos nos manuais didáticos que a demonstração em matemática no ensino fundamental é introduzida no conteúdo relativo a geometria, que em geral encontra-se no final do livro. Os professores por considerarem difícil a questão da demonstração, muitas vezes, optam por não tratar desse assunto. No registro anterior, fica nítido como as dificuldades começam já na identificação da hipótese e da tese. Antes de se iniciar uma demonstração é preciso ter clareza do que se possui como dados e o que queremos de fato comprovar, para então desenvolvermos uma demonstração que nos leve a comprovar a afirmação enunciada. Com relação a essas dificuldades iniciais relativas ao processo de realização de demonstrações, Almouloud (2006) discutiu as noções que alguns professores da rede pública do Estado de São Paulo possuem a respeito de teoremas e demonstrações que aparecem nos textos didáticos voltados para os ensinos fundamental e médio em pesquisa realizada junto a professores participantes de um projeto. Nessa pesquisa, os professores receberam alguns livros de matemática utilizados nas séries finais do ensino fundamental e realizaram uma atividade que consistia em identificar num texto matemático uma demonstração, tarefa essa que exigiu várias discussões e que não foi realizada com tranqüilidade. Concluiu-se que os professores envolvidos nesse trabalho já possuíam uma dificuldade inicial em reconhecer uma demonstração em matemática, fato esse comprovado por uma busca aleatória nos livros por meio de uma visualização de formato de texto matemático. Em geral, detinham-se em textos com figuras como potes, balanças, no sentido de que uma explicação exemplificada com situações concretas deveria aproximar-se ou, efetivamente, ser uma demonstração. Para esses professores a demonstração está ligada a uma contextualização, ou seja, as situações propostas devem ser atreladas um contexto da criança para que o fato matemático se torne compreensível. Essa pesquisa em questão, ainda nos revelou a grande preocupação atual de se dar um sentido prático a tudo que se faz em matemática, transparecendo que só tem valor o que se pode aplicar de imediato numa situação cotidiana. O compreensível passa a ser apenas aquilo que pode ser usado no dia-a-dia, isto é, um conhecimento de uso imediato.

Retornando a nosso estudo, ele vem reforçar o conjunto de dificuldades preliminares que esses professores possuem com relação aos elementos essenciais de uma demonstração, como o reconhecimento do conjunto de dados conhecidos (hipótese) e o que se pretende comprovar (tese). Nesse trecho da sessão que relatamos anteriormente, observamos que a proposição relativa à geometria foi enunciada sem a famosa expressão "se e somente se" que caracteriza os teoremas recíprocos: *"Qualquer ponto P que eqüidista das extremidades de um segmento pertence à mediatriz desse segmento".* A fim de que essa propriedade fosse melhor compreendida e, também, para que os professores pudessem ver que ela poderia ser enunciada de uma outra forma, um dos formadores pediu para que se registrasse na lousa as seguintes afirmações: *"Se P pertence à mediatriz m de um segmento AB, então P é eqüidistante de A e B. Se P é eqüidistante de A e B, então P pertence à mediatriz m do segmento AB."* Esse novo registro permitiu que os professores reconhecessem expressões que lhes são mais familiares ("se ....,então ....") e que os remetem às idéias de condições necessárias e suficientes. Essa nova redação sugerida pelos formadores viabilizou uma discussão sobre o que seriam teoremas recíprocos. Notamos que o grupo não se sentia seguro para afirmar que as sentenças anteriores compunham um teorema recíproco, o que levou, então, um dos formadores a questionar qual seria a hipótese em cada caso. Tal procedimento possibilitou uma melhor compreensão do enunciado, levando um dos formadores a questionar o que seria um teorema recíproco e um dos professores, agora já sentindo-se seguro, responde de forma coloquial: *" a hipótese de um é a tese do outro e vice-versa".* A discussão foi adiante, esclarecendo-se o que são lemas e corolários.

Dando continuidade a atividade, um dos formadores coloca na lousa:"Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes." Em seguida, pergunta ao grupo qual seria a proposição recíproca e um dos professores com segurança afirma:" Se dois ângulos são congruentes, então são opostos pelo vértice." Depois disso, os professores identificam a hipótese e a tese de cada uma das proposições e um dos formadores as registra na lousa. O passo seguinte é indagar quais seriam as respectivas provas. Um dos professores sugere a representação de dois ângulos retos, conforme registrado na nossa descrição em que eles são claramente congruentes, porém não são opostos pelo vértice. Com esse contra-exemplo um dos formadores esclarece que a primeira proposição é válida, mas que a segunda não é, o que ficou evidente com o desenho dos ângulos retos. Dessa forma, o grupo percebe que nem todo teorema possui recíproco, mas mesmo assim, ainda surge uma dúvida: "teorema não é só quando tem ida e volta?" Um dos formadores afirma categoricamente que não e mais adiante completa que tanto teoremas independentes quanto aqueles que possuem ida e volta são teoremas . Para complementar essa discussão um dos formadores indaga como ficaria a redação da proposição inicial ("Qualquer ponto P que eqüidista das extremidades de um segmento pertence à mediatriz desse segmento") utilizando-se o símbolo $\Leftrightarrow$ que é uma representação mais familiar para o grupo quando se trata de teoremas "com ida e volta" e vão além apresentando mais duas opções de registros dessa mesma proposição utilizando apenas linguagem simbólica envolvendo os símbolos $\in$, $\Leftrightarrow$, $\equiv$, $\Rightarrow$, $\wedge$ e $\overline{AB}$ para segmento de reta. Assim, discutiu-se teoremas recíprocos, teoremas independentes e seus possíveis registros a partir de resultados da área de geometria.

4. Considerações finais

Nessa linha de dificuldades relacionadas a demonstrações estudadas nos ensinos fundamental e médio, Heinze (2008) realizou pesquisa referindo-se a experiências de ensino realizadas com alunos na faixa de 13 a 15 anos em Taiwan e na Alemanha. Julgamos necessário esclarecer que as dificuldades apontadas nesse trabalho realizado com jovens estudantes aproximam-se muito das dos professores envolvidos no nosso projeto uma vez que eles possuem uma formação precária em matemática. Muitos desses professores estudaram ciências ou contabilidade e depois realizaram uma complementação em seus estudos que os habilitou a lecionar; na realidade eles não cursaram uma licenciatura plena e específica em matemática. Essa complementação é um recurso aprovado pelos órgãos públicos a fim de regularizar a situação de inúmeras pessoas que já se encontravam trabalhando nas salas de aula de escolas públicas uma vez que, existe uma escassez de licenciados em matemática que optam pelo ensino nessas escolas devido a baixa remuneração.

Nesse trabalho de Heinze (2008), os autores consideram que um dos motivos que levam os alunos a terem dificuldades com demonstrações é a complexidade da prova descrita como um conjunto de argumentos que o aluno deve combinar. Os autores discutem as diferenças entre demonstrações com um passo (*single step*) e com vários passos (*multi-step*) e resumem que construir uma demonstração aceitável em geometria é como um processo de ligação entre condições dadas e uma conclusão desejada com regras que interferem e são controladas por um processo de coordenação que inclui:

"1. Compreender a informação dada e o status dessa informação,

2. Reconhecer os elementos cruciais (premissa, argumento, conclusão), que se associam com as propriedades necessárias para a dedução,

3. Especialmente nas provas com vários passos, construir condições intermediárias para o próximo passo de dedução por uma ligação hipotética, e

4. Coordenar o processo todo e organizar o discursso numa seqüência aceitável." (Nossa tradução), (Heinze, 2008, p.445)

Nesse nosso trabalho ao discutirmos teoremas recíprocos e independentes tornamos evidente a dificuldade que os professores tiveram em identificar as condições necessária e suficiente de uma proposição de geometria. Essa tarefa de reconhecimento de elementos considerados cruciais já selecionada por Heinze (2008) como parte integrante do processo de construção de uma demonstração aceitável. Ou seja, os itens 1 e 2 do processo de coordenação relativos à compreensão do enunciado do teorema, elencados acima pelo autor, são, sem dúvida alguma, fundamentais no processo de redação de uma demonstração. Ficou claro que a identificação de um teorema recíproco está mais ligada a expressões como "se e somente se" do que a uma análise crítica dos dados que são apresentados no enunciado da afirmação matemática. Muitas vezes, acreditamos que ocorre um tipo de "preguiça mental" em que se lê o enunciado da afirmação matemática já se buscando as expressões "se ..., então" e "se e somente se". Constatamos que a inexistência dessas expressões provoca um desequilíbrio na compreensão da proposição matemática gerando dificuldades de identificação da hipótese e tese.

Acreditamos que a metodologia utilizada pelos formadores para discutir um teorema recíproco em contraposição a um independente facilitou a compreensão dos professores que tiveram a oportunidade de simular a "volta" da proposição independente e verificar a partir de um contra-exemplo que ela não era válida. A mudança de registro escrito para linguagem simbólica em que símbolos familiares como "⇔" apareciam também reforçou o entendimento de teorema recíproco, além da oportunidade de constatarem que é possível se transitar de um registro para outro mantendo o mesmo significado. Não é o foco desse trabalho, mas poderíamos discutir vantagens e desvantagens dos diferentes tipos de registro. Essa atividade propiciou aos professores em formação não só a análise dos dados contidos no enunciado de uma afirmação matemática, mas também o resgate de conteúdos de geometria como ângulos congruentes, ângulos opostos pelo vértice, mediatriz de um segmento e pontos eqüidistantes.

Sabemos da grande gama de estudos a respeito de provas e demonstrações que chegam a um nível sofisticado de discussão como a tese de Rav (1999), mencionada anteriormente, que acredita que o simples fato de se planejar uma demonstração já contribui para o desenvolvimento de compreensões matemáticas. No entanto, a nossa realidade de sala de aula do Ensino Básico em escolas públicas ainda está um pouco distante desse patamar de estudo de demonstrações. Com certeza, os conteúdos de geometria que fazem parte do programa curricular do Ensino Básico são os indicados para que se inicie o desenvolvimento do raciocínio dedutivo nas séries finais desse ciclo. Acreditamos que esse intercâmbio entre as universidades e professores, principalmente os da rede pública por meio de uma formação continuada como essa desenvolvida no nosso projeto, é uma das opções para que o professor reveja sua prática docente, sinta-se mais confiante no exercício de sua profissão e, consequentemente, trabalhe com seus alunos em sala de aula inclusive demonstrações.

5. Referencias

Almouloud, S. A.; Fusco, C. A... 2006. Discutindo algumas dificuldades de professores dos ensinos Fundamental e Médio a respeito do conceito de demonstração. In: Anais do III SIPEM – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Água de Lindóia, SP.

Balacheff, N.. 1982 Preuve et démonstration en mathématiques au collège. Recherches em Didactique des Matémathiques, Grenoble, v. 3, n. 3, p. 261-304.

Balacheff, N.. 2004 The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, Grenoble, n. 109.

Balacheff, Nicolas. 2008. The role the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM Mathematics Education*, Heidelberg: Springer Berlin, v. 40, n. 3, p. 501-512. Disponível em: < http://www.springerlink.com/content/wp741844wn683g88/>. Acesso em: 11 jun. 2008.

Florentini, D., Lorenzato, S. A. 2006. Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos. 1. ed. Campinas: Autores Associados,. v. 1. 226 p.

Fusco, C. A. da S., Silva, M. J. F. da, Almouloud, S. A**..** 2007.O comportamento de professor do ensino básico frente a uma situação de demonstração em matemática. IX Encontro Nacional de Educação Matemática. SBEM, Belo Horizonte.

Gouvêa, F. A. T. 1998 Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental. Dissertação (mestrado em Educação Matemática), PUC-SP.

Hanna, Gila; Barbeau, Ed. 2008. Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education*, Heidelberg: Springer Berlin, v. 40, n. 3, p. 345-453.. Disponível em: < http://www.springerlink.com/content/l811525732721706/>. Acesso em: 25 fev. 2008

Heinze, Aiso et al. 2008. Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: twaching experiments in Taiwan and Germany. *ZDM Mathematics Education*, Heidelberg: Springer Berlin, v. 40, n. 3, p. 443-453.. Disponível em: <http://www.springerlink.com/content/4776x71346723546/>. Acesso em: 11 abr. 2008.

Mariotti, Maria Alessandra; Balacheff Nicolas. 2008. Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM Mathematics Education*, Heidelberg: Springer Berlin, v. 40, n. 3, p. 341-453.. Disponível em: < http://www.springerlink.com/content/u7301545611404vg/>. Acesso em: 22 jun. 2008.

Thiollent, M. 1998. Metodologia da pesquisa-ação. 8. ed. São Paulo: Cortez..

6. Copyright Notice